

Capítulo 3

Modelo de Água Rasa

As equações de água rasa descrevem o movimento hidrostático de um fluido incompressível com superfície superior livre. O modelo de água rasa é constituído pelas equações de conservação de momento horizontal e da equação da continuidade de massa.

1. Dinâmica do modelo de água rasa

As equações de movimento e continuidade de massa podem ser expressas como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial(z+h)}{\partial x} + fv \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial(z+h)}{\partial y} - fu \quad (2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial y} = -z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3)$$

Sendo u e v os componentes horizontais do vento, h representa a altura da topografia e z a profundidade da superfície livre medida do topo da topografia (figura 1). Como esse modelo leva em conta a divergência, uma das soluções pode ser a de ondas de gravidade inercial. Essas ondas são muito velozes e podem se amplificar rapidamente durante a integração do modelo e contaminar a previsão.

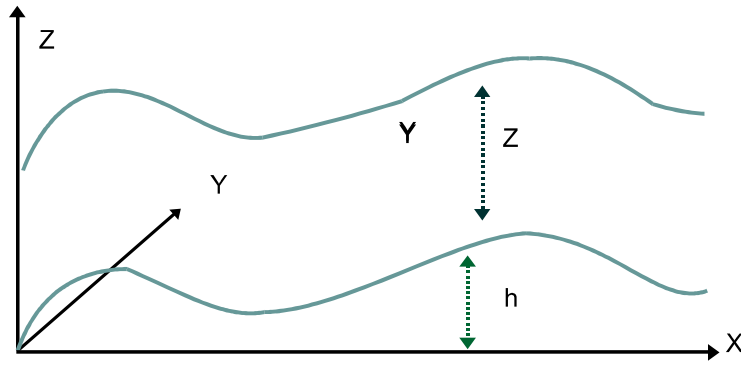


Figura 1 Diagrama esquemático do modelo de água rasa

2. Condições de fronteira para um modelo de água rasa:

Considere a equação completa:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0 \quad (4)$$

Essa equação pode se classificada como:

- a) Elíptica, se $B^2 < 4AC$
- b) Parabólica, se $B^2 = 4AC$
- c) Hiperbólica, se $B^2 > 4AC$

Exemplos:

a) Equação de Helmholtz:

Da equação 4 e considerando:

$$A=C=1, \quad B=D=E=0, \\ F=-\alpha^2, \quad G=-f$$

Têm-se a equação (5):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \alpha^2 u = f(x, y) \quad (5)$$

Observações:

Quando $\alpha^2 = 0$, têm-se a equação de Poisson.

Quando $f = 0$, têm-se a equação de Laplace.

b) Equação da difusão:

Da equação 4 e considerando:

$$A=-k, \quad B=C=D=F=G=0, \quad E=-1 \text{ e } y \equiv t$$

Têm-se a equação (6):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad k > 0 \quad (6)$$

c)

Da equação 4 e considerando:

$$A=c^2, \quad B=D=F=E-G=0, \quad C=-1 \text{ e } y \equiv t$$

Têm-se a equação (7):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c^2 > 0 \quad (7)$$

2.1 Qual a classificação da equação da água rasa?

a) 1º Passo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial v}{\partial x} = f(u, v, x, t) \quad (8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + C \frac{\partial v}{\partial x} + D \frac{\partial u}{\partial x} = g(u, v, x, t) \quad (9)$$

sendo f e g , lineares em u e v .

Eliminando v de (8) e (9):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (C + A) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + (AC - BD) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, u, x, t\right) \quad (10)$$

se:

$$(C+A)^2 - 4(AC-BD) = (C-A)^2 + 4BD > 0$$

então (8) e (9) são **hiperbólicas**.

b) 2º Passo:

Transformar (8) e (9) para a forma normal, para isso, multiplica-se: $\lambda \cdot (9) + (8)$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + \lambda v) + (A + \lambda D) \frac{\partial u}{\partial x} + (B + \lambda C) \frac{\partial v}{\partial x} = f + \lambda g$$

$$\text{sendo } \lambda = \frac{B + \lambda C}{A + \lambda D} \therefore \lambda_{1,2} = \frac{-(A - C) \pm \sqrt{(A - C)^2 + 4BD}}{2D} \quad (11)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$.

Deste modo, (10) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + \lambda, v) + (A + \lambda, D) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda(A + \lambda, D) \frac{\partial v}{\partial x} = f + \lambda g \quad (12)$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + \lambda_1 v) + (A + \lambda_1 D) \frac{\partial}{\partial x}(u + \lambda_1 v) = f + \lambda_1 g \quad (13)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + \lambda_2 v) + (A + \lambda_2 D) \frac{\partial}{\partial x}(u + \lambda_2 v) = f + \lambda_2 g \quad (14)$$

c) 3º Passo: Condições de Fronteira (CF)

A técnica numérica consiste de escrever as equações governantes em diferenças finitas. Deste modo, o modelo de água rasa é integrado sobre uma grade regular de latitude - longitude, como uma série discreta de pontos no espaço e no tempo. Um dos problemas inerentes da área limitada dos modelos de ponto de grade é a especificação das condições de fronteira. A solução das equações governantes depende continuamente dos valores da fronteira, o que faz com que o problema seja muito sensível a sua especificação. O problema mais comum relacionado com a especificação das CF é a contaminação da previsão por ondas de gravidade inercial refletidas para dentro do domínio a partir das fronteiras, ou geradas pela imposição de condições de fronteira inconsistentes com o domínio permitido pelo modelo.

Para realizar essa análise será, considerado o modelo de água rasa em ID e $f=0$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

Nesse caso:

$$A=C=0, B = g,$$

$$D=H \text{ e } v = h$$

Mas, $4gH > 0$, portanto:

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{gH}}{H} \therefore \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{H}} \quad (17)$$

ou

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{gH} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(u + \sqrt{\frac{g}{H}} h \right) = 0 \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{gH} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(u - \sqrt{\frac{g}{H}} h \right) = 0 \quad (19)$$

Deste modo, da equação (18) têm-se:

$$u + \sqrt{\frac{g}{H}} h = \text{cte ao longo de } x - \sqrt{gH}t \quad (20)$$

e da equação (19):

$$u - \sqrt{\frac{g}{H}} h = \text{cte ao longo de } x + \sqrt{gH}t. \quad (21)$$

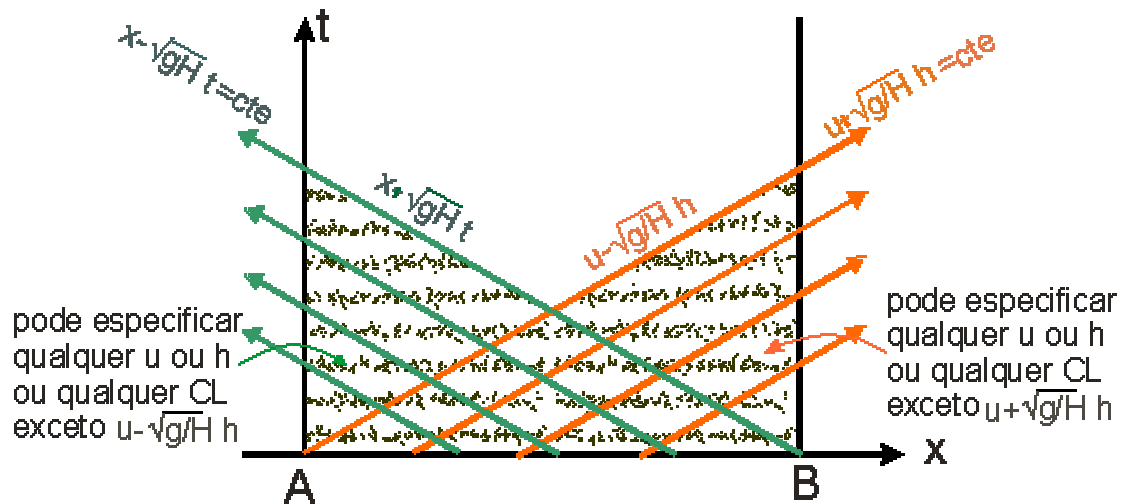


Figura 2

Deste modo, (a partir da figura 2) se for especificado:

$$u - \sqrt{\frac{g}{H}} h = 0 \text{ em } BB' \text{ e } u + \sqrt{\frac{g}{H}} h = 0 \text{ em } AA', \text{ têm-se } u \text{ e } h=0 \text{ fora do domínio } AB$$

em $t=0$, ou seja, não há energia entrando no domínio em $t>0$.

Nota-se que se $u - \sqrt{\frac{g}{H}} h = 0$ em B conduz a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sqrt{\frac{g}{H}} \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (22)$$

que implica em:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \text{e analogamente, (com } c &= \sqrt{gH} \text{):} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} u \text{ e } v \text{ são simplesmente} \\ \text{advectados através das} \\ \text{fronteiras!!!} \end{array}$$

Similarmente, em A (no lado esquerdo):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} - c \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Em A}$$

Isto é chamado: **Condição de Fronteira Radiacional.**

d) 4º Passo: Reflexão física e computacional:

Aplicando um esquema de diferenças finitas, centrado no espaço, nas equações (15) e (16), têm-se:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + g \frac{h_{j+1} - h_{j-1}}{2\Delta x} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial h_j}{\partial t} + H \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = 0 \quad (24)$$

sendo:

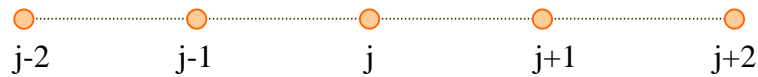


Figura 3

considerando $u \equiv 0$, então $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ (ver equação 15):

Deste modo,

I) $u_j=0; h_j-h_{j-1}=0$

II) $u_j+u_{j-1}=0; h_j-h_{j-1}=0$

III) $u_j=0$ e $\frac{\partial h_j}{\partial t} + H \frac{0 - u_{j-1}}{\Delta x} = 0$ (esquema não centrado).

Usualmente u_j e h_j são proporcionais a $e^{i(kj \Delta x - \omega t)}$, portanto:

$$\left. \begin{aligned} \varpi u_j - gh_j \frac{\text{sen } k\Delta x}{\Delta x} &= 0 \\ \varpi u_j - gh_j \frac{\text{sen } k\Delta x}{\Delta x} &= 0 \end{aligned} \right\} \omega^2 = gH \frac{\text{sen}^2 p}{\Delta x^2} \quad \text{Relação de dispersão} \quad (25)$$

sendo $p=k\Delta x$. Desta maneira, ω pode ser especificado se k (ou p) for conhecido.

Se:

$p = p_0$, a relação de dispersão é satisfeita.

$p = -p_0 \rightarrow$ modo físico

$p = \pi - p_0$ } modo computacional

$p = -(\pi - p_0)$ }

Então, existem 4 modos para cada ω , sendo 2 soluções verdadeiras.

Portanto, o autovetor forma uma série completa. O que implica em:

$$u_j = \left[A e^{ip_0 j} + B e^{-ip_0 j} + \underbrace{C e^{i(\pi-p_0)j} + D e^{-i(\pi-p_0)j}}_{\text{computacional}} \right] e^{i\omega t} \quad (26)$$

e

$$h_j = \left(\frac{H}{\omega \Delta x} \right) \left[A \sin p_0 e^{ip_0 j} - B \sin p_0 e^{-ip_0 j} + \underbrace{C \sin p_0 e^{i(\pi-p_0)j} - D \sin p_0 e^{-i(\pi-p_0)j}}_{\text{computacional}} \right] e^{i\omega t}$$

e a onda incidente p_0 varia de 0 a π ($0 < p_0 < \pi$).

Se $\omega > 0 \rightarrow \sin p_0 = \frac{\omega \Delta x}{\sqrt{gH}}$, e portanto:

$$h_j = \sqrt{\frac{H}{g}} \left[A e^{ip_0 j} - B e^{-ip_0 j} + C e^{i(\pi-p_0)j} - D e^{-i(\pi-p_0)j} \right] e^{-i\omega t} \quad (27)$$

Se $\omega > 0 \rightarrow e^{ip_0 j} e^{-i\omega t}$ representa a onda movendo-se para a direita ($x > 0$). E a amplitude da onda incidente é =1 (p_0).

1ª onda refletida = R ($-p_0$)

2ª onda refletida = r ($\pi-p_0$)

Considerando $A=1$, $B=R$, $C=r$ e $D=0$ e fazendo $u_j=0 \quad \forall t$ e para $J=0 \rightarrow 1+R+r=0$.

Fazendo $h_j=h_{j-1} \quad \forall t$ e para $J=0 \rightarrow$

$$\sqrt{\frac{H}{g}} (1+R+r) = \sqrt{\frac{H}{g}} (e^{-ip_0} - R e^{ip_0} + r e^{-i(\pi-p_0)}) \quad (28)$$

A solução em $r=0$ e $R=1$ e o modo refletido é **computacional**.

No caso $r = \frac{2 \cos p_0 - 1}{2(1 - \cos p_0) + 2 \sin p_0}$ há uma **reflexão parcial**.

No terceiro caso $R=0$ e $r=1$ (**condição radiacional**) e:

$$u_j = \left[e^{ip_0j} + Re^{-ip_0j} + re^{i(\pi-p_0)j} \right] e^{-i\omega t} \quad (29)$$

$$h_j = \sqrt{\frac{H}{g}} \left[e^{ip_0j} + Re^{-ip_0j} + re^{i(\pi-p_0)j} \right] e^{-i\omega t} . \quad (30)$$

3. Uma aplicação de inicialização do modelo de água rasa

A dificuldade de obter uma definição sinótica da relação pressão - vento em baixas latitudes é bem conhecida. Além disso, devido a erros nas medidas do perfil vertical da temperatura, a lei da hidrostática não é totalmente válida, especialmente na baixa troposfera, onde um erro na temperatura de aproximadamente 1°C pode conduzir a erros na medida de 20 m na altura geopotencial. Uma pergunta a se responder é: como obter o campo de altura geopotencial em regiões de baixas latitudes? No modelo de água rasa, o campo de altura geopotencial é deduzido do movimento horizontal através de leis de balanço aplicadas sucessivamente. Este procedimento é chamado inicialização estática. O campo de altura geopotencial obtido do balanço não linear é melhorado por um processo chamado inicialização dinâmica. O procedimento da inicialização dinâmica é baseado nas equações de água rasa . O processo vincula uma integração adiantada – atrasada das equações primitivas de u e v e campos de z obtidos da inicialização estática. Sugi (1986) propôs um procedimento para inicialização dinâmica que utiliza um método adiantado-atrasado (em torno do primeiro passo de tempo).

Neste método o esquema adiantado – atrasado leva em conta o termo linear enquanto que o termo não linear é fixo. Após 100 iterações do termo linear os termos não lineares são atualizados, e este processo inteiro é repetido cinco vezes. Sugi (1986) demonstrou um ligeiro amortecimento dos modos de alta frequência, com uma solução que corresponde a obtida usando uma inicialização de modo normal.

Quando o método do Sugi é considerado em modelos de ponto de grade um ligeiro amortecimento de oscilações de alta - frequência ocorre. Entretanto, em modelos de mesoescala com altas resolução, este esquema de iteração converge lentamente e requer

uma reformulação. Na inicialização em modos normais dinâmica, como a formulado por Sugi (1986) a inicialização é feita no espaço físico; entretanto, isto pode ser facilmente estendido e desenvolvido no espaço vertical (Kumar, 1990).

Um exemplo de modelo de água rasa é apresentado nos exercícios.

Bibliografia:

Haltiner, G. J. and R. T. Williams, 1971: Numerical Prediction and Dynamic Meteorology –
Jonh Wiley & Sons, 477 pp.

Mesinger, F. and A. Arakawa, 1976: Numerical Methods used in Atmospheric Models.
GARP – WMO, 76 pp.

Kumar, A., 1990: Generalized dynamic normal mode initialization. Ph.D. thesis, dept. of
Meteorology, Florida State University, Tallahassee.

Sugi, M. 1986: Dynamic normal mode initialization. J. Meteorol. Soc. Japan, 64, 623-636.

Exercícios:

O exercício resolvido no “*excel*” apresenta a resolução da equação da água rasa.